

令和5年度入学試験問題

数 学 (理系)

200点満点

《配点は、一般選抜学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページをあわせて16ページある。
3. 問題は全部で6題ある(1ページから2ページ)。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題番号に対応する解答用ページに書くこと。それ以外のページに書かれたものは採点の対象としない。ただし、解答用ページに続き方をはっきり示した場合は、見開きの隣接する計算用ページを解答用ページの続きとして使用してもよい。この場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨が明示されたときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。なお、他のページに書かれたものは採点の対象とはならないので注意すること。
6. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。なお、計算用ページおよび余白ページに書かれた解答のための下書き、計算などは、消さずに残しておいてもよい。
7. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
8. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(35 点)

次の各問に答えよ.

問 1 定積分 $\int_1^4 \sqrt{x} \log(x^2) dx$ の値を求めよ.

問 2 整式 $x^{2023} - 1$ を整式 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ で割ったときの余りを求めよ.

2

(30 点)

空間内の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする. 点 D, P, Q を次のように定める. 点 D は $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC}$ を満たし, 点 P は線分 OA を $1:2$ に内分し, 点 Q は線分 OB の中点である. さらに, 直線 OD 上の点 R を, 直線 QR と直線 PC が交点を持つように定める. このとき, 線分 OR の長さ と線分 RD の長さの比 $OR:RD$ を求めよ.

3

(30 点)

n を自然数とする. 1 個のさいころを n 回投げ, 出た目を順に X_1, X_2, \dots, X_n とし, n 個の数の積 $X_1 X_2 \cdots X_n$ を Y とする.

(1) Y が 5 で割り切れる確率を求めよ.

(2) Y が 15 で割り切れる確率を求めよ.

4

(35 点)

次の関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ.

$$f(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1 + \frac{1}{e^{-x^2} + \frac{1}{4}x^2 + 1} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

ただし, e は自然対数の底であり, その値は $e = 2.71\cdots$ である.

5

(35 点)

O を原点とする xyz 空間において, 点 P と点 Q は次の 3 つの条件(a), (b), (c) を満たしている.

- (a) 点 P は x 軸上にある.
- (b) 点 Q は yz 平面上にある.
- (c) 線分 OP と線分 OQ の長さの和は 1 である.

点 P と点 Q が条件(a), (b), (c) を満たしながらくまなく動くとき, 線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めよ.

6

(35 点)

p を 3 以上の素数とする. また, θ を実数とする.

- (1) $\cos 3\theta$ と $\cos 4\theta$ を $\cos \theta$ の式として表せ.
- (2) $\cos \theta = \frac{1}{p}$ のとき, $\theta = \frac{m}{n} \cdot \pi$ となるような正の整数 m, n が存在するかどうかを理由を付けて判定せよ.

問題は, このページで終わりである。