

令和8年度特色入試問題

《理学部(数理科学入試)》

数学に関する能力測定考査

80点満点

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は全部で4題ある(1ページから4ページ)。
3. 解答冊子は問題ごとに1冊ずつある(全部で4冊ある)。それぞれの解答冊子は表紙のほかに7ページある。
4. 試験開始後、それぞれの解答冊子の表紙所定欄に受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題ごとに指定された解答冊子の解答用ページに書くこと。ただし、続き方をはっきり示して同じ解答冊子の計算用ページに解答の続きを書いてもよい。この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。それ以外の場合、計算用ページは採点の対象としない。
6. 解答のための下書き、計算などは、計算用ページに書いてもよい。
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。
8. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(20 点)

平面内の三角形 $\triangle ABC$ を考える. $\triangle ABC$ の面積を S とする. 平面内の任意の点 P に対して,

$$\frac{16S^2}{9} \left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} + \frac{1}{AC^2} \right) \leq AP^2 + BP^2 + CP^2$$

が成り立つことを示せ.

2

(20 点)

N を自然数とする. コインを N 回投げ, 関数 $f_0(x), f_1(x), \dots, f_N(x)$ を次で帰納的に定める.

$$f_0(x) = e^x$$

$$f_n(x) = \begin{cases} f'_{n-1}(x) & (n \text{ 回目に投げたコインが表の場合}) \\ x f_{n-1}(x) & (n \text{ 回目に投げたコインが裏の場合}) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

このとき, $f_N(0)$ が奇数である確率を求めよ. ただし, コインを投げて出る結果は各回で独立であり, コインを 1 回投げたときに表と裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるとする.

3

(20 点)

a を正の実数とする. 正の実数 t に対して, 不等式

$$x^2 + y^2 + a^2 z^2 \leq t^2$$

を満たす点 (x, y, z) 全体からなる集合を $V(t)$ とする. また, $V(t)$ に含まれる点 (x, y, z) のうち, x, y, z がすべて整数であるものの個数を $N(t)$ とする. このとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t^3}$$

を求めよ.

4

(20 点)

a, b を正の実数とし, $a > 1$ とする. 定義域を $x \geq 0$ とする連続関数 $f(x), g(x), h(x)$ が次の 3 つの等式を満たしているとする.

$$f(x) = a \exp(-h(x))$$

$$g(x) = b \exp\left(\int_0^x (f(y) - 1) dy\right)$$

$$h(x) = \int_0^x g(y) dy.$$

ただし, $\exp(x) = e^x$ とする. このとき, $g(x)$ の最大値を求めよ.

問題は, このページで終わりである.