

## 令和 7 年度 特色 入 試 問 題

### 《 理 学 部 (数理科学入試) 》

# 数学に関する能力測定考査

80 点 満 点

#### (注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は全部で 4 題ある (1 ページから 4 ページ)。
3. 解答冊子は問題ごとに 1 冊ずつある (全部で 4 冊ある)。それぞれの解答冊子は表紙のほかに 8 ページある。
4. 試験開始後、それぞれの解答冊子の表紙所定欄に受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題ごとに指定された解答冊子の解答用ページに書くこと。ただし、続き方をはっきり示して同じ解答冊子の計算用ページに解答の続きを書いてもよい。この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。それ以外の場合、計算用ページは採点の対象としない。
6. 解答のための下書き、計算などは、計算用ページに書いてもよい。
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。
8. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

|   |
|---|
| 1 |
|---|

(20 点)

$n$  を自然数とする．実数  $x$  に対し， $x$  を超えない最大の整数を  $[x]$  とし， $f(x) = x - [x]$  と定める．このとき，1 よりも大きく，かつ整数でないような実数  $x$  のうちで，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{nf(\sqrt[n]{x})}\right) = \frac{1}{2}$$

を満たすものをすべて求めよ．

2

(20 点)

$n$  を 5 以上の自然数とする.  $K, O, T, Y$  が 1 文字ずつ書かれた 4 枚のカード

$\boxed{K}, \boxed{O}, \boxed{T}, \boxed{Y}$

を用意する. この 4 枚のカードから 1 枚を引き, 書かれた文字を記録し, 戻すという操作を  $n$  回繰り返す, 記録された順に文字を左から並べる.

このとき, 並んだ  $n$  個の文字の中に, 連続した文字列「KYOTO」が現れる確率  $p_n$  が

$$p_n \geq 1 - \left( \frac{1023}{1024} \right)^{n-4}$$

を満たすことを示せ.

ただし, 上の操作においては, それぞれのカードを毎回独立に, 等しい確率で引くものとする.

3

(20 点)

座標平面における領域

$$A = \{(x, y) \mid y \geq e^x\}$$

で定まる図形  $A$  を考える.  $A$  に対して, 原点を中心とする回転や平行移動を, 何回か行って得られる図形を  $n$  個用意し, それぞれ  $A_1, A_2, \dots, A_n$  とする.

このとき,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  により座標平面全体を覆うことのできる  $n$  の最小値を求めよ.

自然数  $n$  に対して、関数  $f_n(x)$  を次で帰納的に定める.

$$f_1(x) = \sin(x)$$

$$f_n(x) = \sin(f_{n-1}(x)) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

また、 $L$  を正の実数とし、

$$f_n(a) - \frac{a}{L} = 0$$

を満たす実数  $a$  の個数を  $A_{L,n}$  とする. このとき、以下の設問に答えよ.

(1)  $L \leq 1$  のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{L,n}$  の値を求めよ.

(2)  $L > 1$  のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{L,n}$  の値を求めよ.

ただし、0 以上の実数からなる数列  $\{a_n\}$  が、任意の  $n$  に対して  $a_{n+1} \leq a_n$  を満たすとき、数列  $\{a_n\}$  が収束することを用いてもよい.

問題は、このページで終わりである.