令 和 3 年 度 特 色 入 試 問 題

《 理 学 部 （数理科学入試） 》

数　学

80 点 満 点

（注　意）

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと．
2. 問題は全部で 4 題ある（1 ページから 4 ページ）．
3. 解答冊子は問題ごとに 1 冊ずつある（全部で 4 冊ある）．それぞれの解答冊子は表紙のほかに 8 ページある．
4. 試験開始後，それぞれの解答冊子の表紙所定欄に受験番号・氏名をはっきり記入すること．表紙には，これら以外のことを書いてはならない．
5. 解答は問題ごとに指定された解答冊子の解答用ページに書くこと．ただし，続き方をはっきり示して同じ解答冊子の計算用ページに解答の続きを書いてもよい．この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する．それ以外の場合，計算用ページは採点の対象としない．
6. 解答のための下書き，計算などは，計算用ページに書いてもよい．
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある．
8. 解答冊子は，どのページも切り離してはならない．
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが，解答冊子は持ち帰ってはならない．

$\boxed{1}$ (20 点)

n を 3 以上の自然数，λ を実数とする．次の条件 (i)，(ii) を満たす空間ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ が存在するための，n と λ が満たすべき条件を求めよ．

(i) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ は相異なる長さ 1 の空間ベクトルである．

(ii) $i \neq j$ のときベクトル $\vec{v}_i$ と $\vec{v}_j$ の内積は λ に等しい．

$\boxed{2}$ (20 点)

自然数 n, m に対して横 n 個，縦 m 個からなる $n \times m$ 個のマスを考え，それぞれのマスに 1 つずつ白玉または黒玉を入れる．その白玉と黒玉の入れ方のうち，黒玉が上下左右いずれにも隣り合わないような入れ方の総数を $a_{n,m}$ とする．例えば $n=5, m=3$ のとき，図 1 の入れ方は黒玉が上下左右いずれにも隣り合わないような入れ方であり，図 2 の入れ方は黒玉が左右に隣り合っている入れ方である．

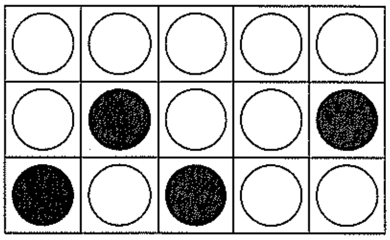

図 1

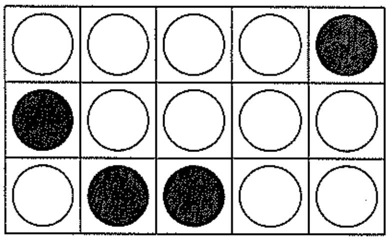

図 2

以下の設問に答えよ．

(1) $a_{n,2}$ を求めよ．

(2) ある正の実数 D が存在して，すべての自然数 n について

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{\log_2 a_{n,n}}{n^2} \leqq \frac{1}{2}\log_2(1+\sqrt{2}) + \frac{D}{n}$$

となることを示せ．

$\boxed{3}$ (20 点)

以下の条件 (i)，(ii)，(iii) を満たす実数の列 $x_1, x_2, \ldots, x_{1000}$ は存在するか．

(i) $x_1 = \dfrac{1}{2}$

(ii) $k = 2, 3, \ldots, 1000$ に対し，x_k は

$$\frac{x_{k-1} + 99}{100}, \qquad -\frac{100x_{k-1}}{99x_{k-1} - 1}$$

のいずれかに等しい．ただし，$x_{k-1} = \dfrac{1}{99}$ のときは $x_k = \dfrac{x_{k-1} + 99}{100}$ とする．

(iii) $\dfrac{49}{100} < x_{1000} < \dfrac{51}{100}$

$\boxed{4}$ (20 点)

C を 1 以上の実数，$\{a_n\}$ を 0 以上の整数からなる数列で $a_1 = 0, a_2 = 1$ を満たすとする．xy 平面上の点 $\mathrm{A}_n = (a_n, a_{n+1})$ はすべての $n = 1, 2, 3, \ldots$ について次の条件 (i)，(ii)，(iii) を満たすとする．

(i) 3 点 $\mathrm{A}_n, \mathrm{O}, \mathrm{A}_{n+1}$ は同一直線上になく，三角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+1}$ と三角形 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+2}$ の内部は互いに交わらない．

(ii) 三角形 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+1}$ の面積は C より小さい．

(iii) $\angle \mathrm{A}_1\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+1} < \dfrac{\pi}{4}$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \angle \mathrm{A}_1\mathrm{O}\mathrm{A}_{n+1} = \frac{\pi}{4}$ である．

ここで O は xy 平面の原点を表す．以下の設問に答えよ．

(1) $C = 100$ のとき，(i)，(ii)，(iii) を満たす数列 $\{a_n\}$ の例を 1 つ与えよ．

(2) 自然数 n, m が $n < m$ を満たすとき，

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{m+1}}{a_m} \leqq 2C\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right)$$

となることを示せ．

(3) ある実数 D が存在して，すべての自然数 n について $a_{n+1} - a_n \leqq D$ となることを示せ．

(4) ある自然数 n_0 が存在して，点 $\mathrm{A}_{n_0}, \mathrm{A}_{n_0+1}, \mathrm{A}_{n_0+2}, \ldots$ はすべて同一直線上にあることを示せ．

問題は，このページで終わりである．

令和３年度 特色

問題訂正
（理学部・数理科学入試 数学）

下記のとおり，数学の問題について一部訂正があります。

記

問　題　訂　正

数学　問題冊子

４ページ

$\boxed{4}$

１０行目

（誤）（２）自然数n, m がn＜mを満たすとき，...

↓

（正）（２）<u>２以上の</u>自然数n, m がn＜mを満たすとき，...

以上