

制約想定を必要としない新しい最適性必要条件の導出

—すべての最適解が満たす方程式の新しい導出方法を提案—

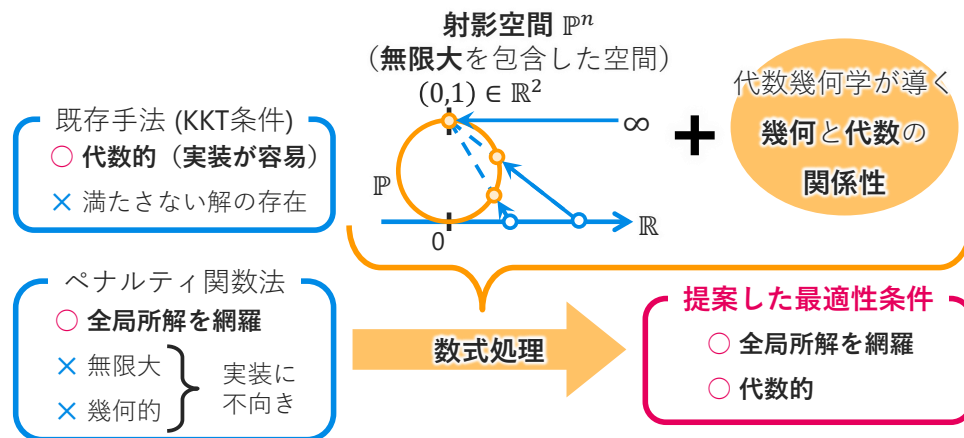
概要

京都大学大学院情報学研究科 庵智幸 博士後期課程学生 と 大塚敏之 同教授の研究グループは、多項式で表されるような制約付き非線形最適化問題に対し、その全ての最適解が満たすような条件式を導出するアルゴリズムの開発に成功しました。

実社会におけるあらゆる問題は、守らなければならない制約条件のもとで、何らかの評価指標を最小化あるいは最大化する制約付き最適化問題として定式化することができます。この制約付き最適化問題を解く際に、最適解が満たすべき条件である最適性必要条件が重要になります。既に様々な最適性必要条件が提案・研究されていますが、中でも Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件は、方程式で記述できるため具体的な最適解を計算するのに適しており、多くの理論的あるいは応用的な研究成果の基礎となっています。しかしながら、一部の最適解に対しては KKT 条件が最適性必要条件にならないこと、つまり、KKT 条件を解いても一部の最適解を見つけられないことが知られていました。

本研究では、制約条件を破ることにに対してペナルティを課すという古典的な解法に、多項式を数式のまま計算機で厳密に処理できる数式処理という、比較的新しい技術を組み合わせることで、全ての最適解が満たす条件式を導出しました。明確に方程式として書き表すことのできる最適性必要条件としては、1951年に KKT 条件が発表されて以来、およそ 70 年ぶりの成果と考えられます。この条件式は計算機で具体的な最適解を求めるのに利用できるため、従来の KKT 条件では見つけれなかった新しい最適解の発見や、この条件式を基礎とする新たな最適化アルゴリズムの開発に繋がります。

本研究成果は、2020年10月31日に国際学術誌「Journal of Operations Research Society of Japan」のオンライン版に掲載されました。



京都大学大学院情報学研究科 庵智幸 博士後期課程学生 と 大塚敏之 同教授の研究グループは、多項式で表されるような制約付き非線形最適化問題に対し、その全ての最適解が満たすような条件式を導出するアルゴリズムの開発に成功しました。

実社会におけるあらゆる問題は、守らなければならない制約条件のもとで、何らかの評価指標を最小化あるいは最大化する制約付き最適化問題として定式化することができます。この制約付き最適化問題を解く際に、最適解が満たすべき条件である最適性必要条件が重要になります。既に様々な最適性必要条件が提案・研究されていますが、中でも Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件は、方程式で記述できるため具体的な最適解を計算するのに適しており、多くの理論的あるいは応用的な研究成果の基礎となっています。しかしながら、一部の最適解に対しては KKT 条件が最適性必要条件にならないこと、つまり、KKT 条件を解いても一部の最適解を見つけられないことが知られていました。

本研究では、制約条件を破ることにに対してペナルティを課すという古典的な解法に、多項式を数式のまま計算機で厳密に処理できる数式処理という、比較的新しい技術を組み合わせることで、全ての最適解が満たす条件式を導出しました。明確に方程式として書き表すことのできる最適性必要条件としては、1951年に KKT 条件が発表されて以来、およそ 70 年ぶりの成果と考えられます。この条件式は計算機で具体的な最適解を求めるのに利用できるため、従来の KKT 条件では見つけれなかった新しい最適解の発見や、この条件式を基礎とする新たな最適化アルゴリズムの開発に繋がります。

本研究成果は、2020年10月31日に国際学術誌「Journal of Operations Research Society of Japan」のオンライン版に掲載されました。

1. 背景

社会におけるあらゆる課題に対して「最も良い答えが知りたい」と思うとき、その課題は最適化問題として定式化されます。例えば、設計仕様を満たすような工業製品を最も安価に作りたい、物流においてガソリン消費を抑えつつ最速で運搬を行いたい、もしくは、製品の質を担保しつつ工場内のロボットアームの作業効率が最大になるような制御をしたい、といった問題が考えられます。

このような最適化問題には「製品の設計仕様」や「ガソリンの使用可能量」というような制約条件が付随してきます。このように、制約条件を守りつつ最適化を行う問題を制約付き最適化問題と呼びます。この制約付き最適化問題を解く際、最適解が必ず満たすべき条件である最適性必要条件が重要なツールとなります。

このため最適性必要条件の研究は古くから行われており、特に KKT 条件と呼ばれる条件が簡単な方程式の形で表されることから、理論と応用の両面において様々な結果の基礎となっています。しかしながら、KKT 条件が正しく最適性必要条件として機能するためには、解こうとしている問題の制約条件が制約想定と呼ばれる追加の条件を満たす必要があることが知られていました。これは、制約想定が成り立たない問題に対しては、KKT 条件を満たしていない解であっても最適解になりうること、言い換えれば、KKT 条件だけを見ていると最適解を見逃してしまう可能性があるということを示しています（図 1）。

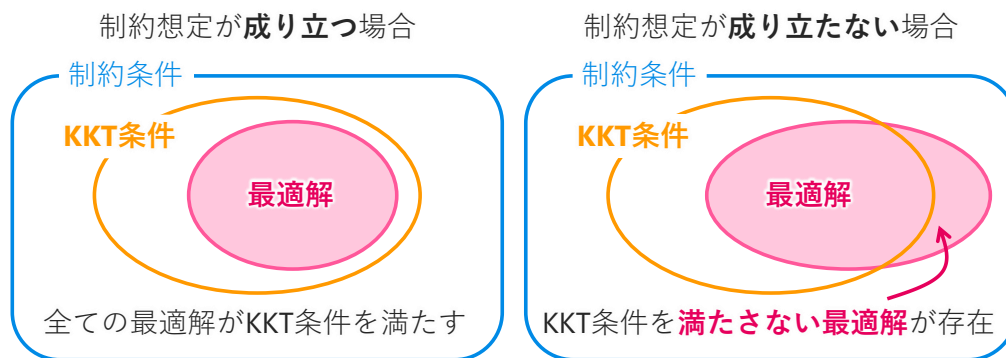


図 1: KKT 条件と最適解、制約想定の関係の模式図

2. 研究手法・成果

全ての最適解に対する最適性必要条件は、これまでも様々なものが提案されていますが、図形同士の包含関係などから定まる幾何的な条件が多く、方程式として書き下せない（=プログラムとして計算機に計算させることができない）ことが応用上の問題となっていました。本研究では、こうした従来の成果の中でも古典的な結果であるペナルティ関数法による点列の収束を利用した条件に着目しました。

ペナルティ関数法による最適性条件には大きく 2 つの問題があります。1 つ目は、厳密に条件が成り立つかどうかを調べるためには無限大の計算を行う必要があること、2 つ目は、条件が点列の収束という幾何的な形で与えられており、方程式で書き下せないことです。本研究では、最適化問題の分野ではあまり使われてこなかった代数幾何学と呼ばれる数学の一分野を利用して、多項式で表されるような制約付き問題に対してこれら 2 つの問題を解決しました。

無限大という対象は、射影空間（図 2）と呼ばれる幾何的な概念を用いることで、有限な点と同じように取り扱うことができるようになります。さらに、代数幾何学（図 3）という図形と数式の対応関係を調べる分野の成果を活用することで、この幾何的な概念を多項式として、計算機上で計算することができるようになります。このような数式を入力として数式を出力する計算方法は、数値を入力として数値を出力する通常の数値計算とは異なるため、数式処理という名前で呼ばれています。本研究が提案した手法では、数値計算では計算で

きない無限大や点列の収束といった対象を数式処理で取り扱うことで、ペナルティ関数法による最適性必要条件を方程式で表すことに成功しました（図4）。

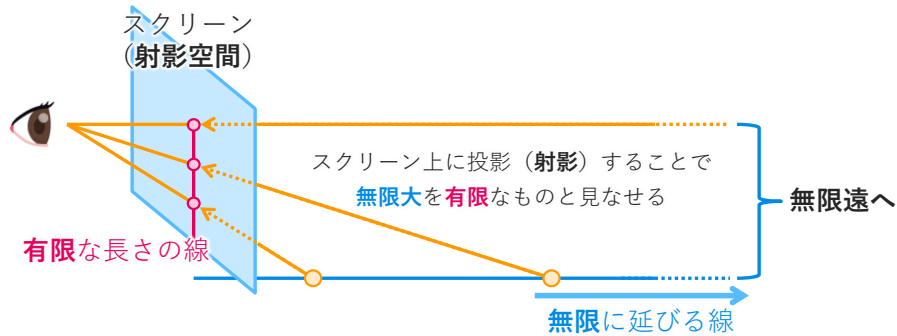


図2:射影空間のイメージ

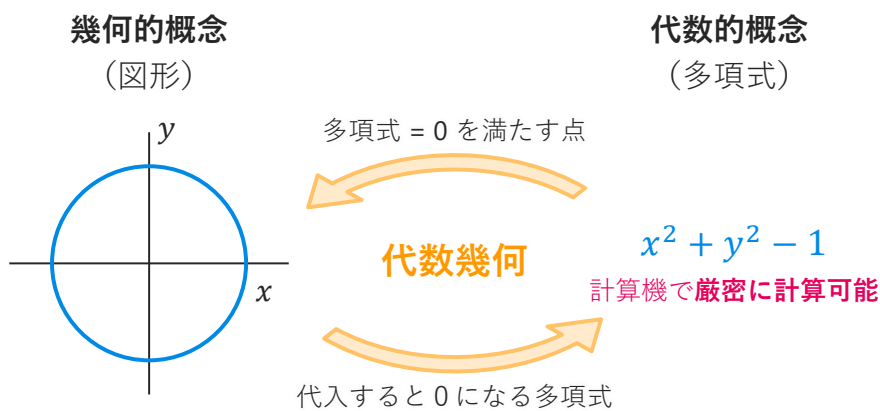


図3:代数幾何学における代数と幾何の関係

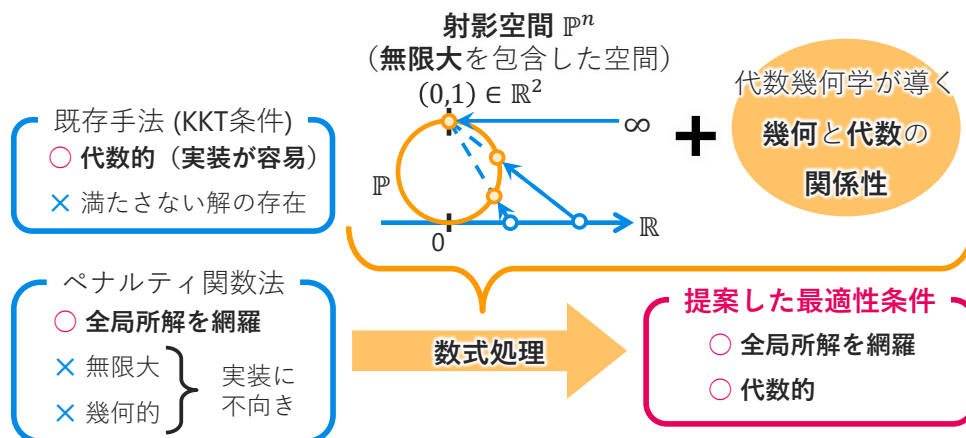


図4:提案手法

3. 波及効果、今後の予定

実社会に存在する多くの問題が最適化問題として定式化されているため、本研究の提案手法は、それらの問題に対して、従来法では見つけられなかった新しい最適解を見つけられる可能性があります。特に、制約条件が多数あるような複雑な問題であればあるほど、その可能性は高まると考えています。今後の予定としては、実問題への適用や従来の最適性必要条件に対する研究結果との関連性の解明が挙げられます。

4. 研究プロジェクトについて

本研究は日本学術振興会(JSPS)科研費 18J22093 および 15H02257 の助成を受けています。

<用語解説>

最適性必要条件：最適解が満たす必要のある条件、言い換えれば、この条件を満たさない解は絶対に最適解ではない、と断定できる条件。

制約想定：KKT 条件が最適性必要条件となるために制約が満たさなければならない条件。

ペナルティ関数法：制約付き最適化問題に対して、制約を破った量に応じたペナルティを考えることでより簡単な問題へと帰着させる手法。ペナルティの重みを無限に大きくすると、元の制約付き最適化問題に一致することが知られている。

<研究者のコメント>

最適化問題はあらゆる分野に普遍的に現れる問題です。この意味において、最適化数学の基礎理論に関連して少しでも新しい発見ができれば、それが社会全体に対する大きな貢献へと繋がるのではないかと思い、研究を行っています。

<論文タイトルと著者>

タイトル：Limit Operation in Projective Space for Constructing Necessary Optimality Condition of Polynomial Optimization Problem (多項式最適化問題に対する最適性必要条件の導出を目的とした射影空間上の極限操作)

著者：Tomoyuki Iori & Toshiyuki Ohtsuka

掲載誌：Journal of Operations Research Society of Japan DOI : <https://doi.org/10.15807/jorsj.63.114>