

令和 2 年度 入学 試験 問題

数 学 (理系)

200 点満点

《配点は、一般入試学生募集要項に記載のとおり。》

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は監督者の指示があるまで開かないこと。
2. 解答冊子は表紙のほかに、解答用ページ、計算用ページ、余白ページをあわせて 16 ページある。
3. 問題は全部で 6 題ある(1 ページから 3 ページ)。
4. 試験開始後、解答冊子の表紙所定欄に学部名・受験番号・氏名をはっきり記入すること。表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は解答冊子の指定された解答用ページに書くこと。ただし、続き方をはっきり示して見開きに隣接する計算用ページに解答の続きを書いてもよい。その場合は、解答用ページに「計算用ページに続く」旨を記すこと。このときに限って、計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。また、余白ページに書かれたものは採点の対象としない。
6. 解答のための下書き、計算などは、計算用ページまたは余白ページに書いて、残しておいてもよい。
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。
8. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

1

(30 点)

a, b は実数で, $a > 0$ とする. z に関する方程式

$$z^3 + 3az^2 + bz + 1 = 0 \quad (*)$$

は 3 つの相異なる解を持ち, それらは複素数平面上で一辺の長さが $\sqrt{3}a$ の正三角形の頂点となっているとする. このとき, a, b と $(*)$ の 3 つの解を求めよ.

2

(30 点)

p を正の整数とする. a, β は x に関する方程式 $x^2 - 2px - 1 = 0$ の 2 つの解で, $|a| > 1$ であるとする.

- (1) すべての正の整数 n に対し, $a^n + \beta^n$ は整数であり, さらに偶数であることを証明せよ.
- (2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-a)^n \sin(a^n \pi)$ を求めよ.

3

(35 点)

k を正の実数とする. 座標空間において, 原点 O を中心とする半径 1 の球面上の 4 点 A, B, C, D が次の関係式を満たしている.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{\sqrt{6}}{4}, \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = k. \end{aligned}$$

このとき, k の値を求めよ. ただし, 座標空間の点 X, Y に対して, $\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OY}$ は, \overrightarrow{OX} と \overrightarrow{OY} の内積を表す.

4

(35 点)

正の整数 a に対して,

$$a = 3^b c \quad (b, c \text{ は整数で } c \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})$$

の形に書いたとき, $B(a) = b$ と定める. 例えば, $B(3^2 \cdot 5) = 2$ である.

m, n は整数で, 次の条件を満たすとする.

- (i) $1 \leq m \leq 30$.
- (ii) $1 \leq n \leq 30$.
- (iii) n は 3 で割り切れない.

このような (m, n) について

$$f(m, n) = m^3 + n^2 + n + 3$$

とするとき,

$$A(m, n) = B(f(m, n))$$

の最大値を求めよ. また, $A(m, n)$ の最大値を与えるような (m, n) をすべて求めよ.

5

(35 点)

縦 4 個, 横 4 個のマス目のそれぞれに 1, 2, 3, 4 の数字を入れていく. このマス目の横の並びを行といい, 縦の並びを列という. どの行にも, どの列にも同じ数字が 1 回しか現れない入れ方は何通りあるか求めよ. 下図はこのような入れ方の 1 例である.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	1	2	3
2	3	4	1

6

(35点)

x, y, z を座標とする空間において, xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

を z 軸のまわりに 1 回転させるとき, この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする. この S をさらに x 軸のまわりに 1 回転させるとき, S が通過した部分よりなる立体を V とする. このとき, V の体積を求めよ.

問題は, このページで終わりである.