

令和2年度特色入試問題

《総合人間学部》 理系総合問題

100点満点

(注 意)

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと。
2. 問題は全部で4題ある(1ページから6ページ)。
3. 解答冊子は全部で2冊ある。それぞれの解答冊子は表紙のほか、6ページ、8ページある。
4. 試験開始後、それぞれの解答冊子の表紙所定欄に受験番号・氏名をはっきり記入すること。
表紙には、これら以外のことを書いてはならない。
5. 解答は問題ごとに指定された解答冊子の解答用ページに書くこと。ただし、続き方をはっきり示して同じ解答冊子の下書き用ページに解答の続きを書いてもよい。この場合に限って下書き用ページに書かれているものを解答の一部として採点する。それ以外の場合、下書き用ページは採点の対象としない。
6. 解答のための下書き、計算などは、下書き用ページに書くこと。
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある。
8. 解答冊子は、どのページも切り離してはならない。
9. 問題冊子は持ち帰ってもよいが、解答冊子は持ち帰ってはならない。

I

(25 点)

ブラマンジェという型にはめて作るフランス由来のお菓子がある。ここではブラマンジェが、区間 $0 \leq x \leq 1$ 上の関数

$$y = \sum_{n=0}^N \frac{s(2^n x)}{2^n}$$

のグラフと x 軸で囲まれた領域を直線 $x = \frac{1}{2}$ の周りに 1 回転してできる立体として与えられているとする。ただし、ここで N は自然数、 $s(x)$ は x から最も近い整数までの距離とする。

(1) ブラマンジェの体積を計算し、 N を用いて表せ。

(2) (1) で求めた体積の $N \rightarrow \infty$ の極限を求めよ。

ただし、計算の際にパップス・ギュルダンの定理を証明無しに使ってもよい。ここでパップス・ギュルダンの定理とは次のものである：

面積 S の平面図形 A が、それと同一平面上の直線 l の一方の側（直線 l を含む）のみにあるとき、その図形 A を直線 l の周りに 1 回転させてできる立体の体積は、(回転による A の重心の移動距離) $\times S$ となる。

また面積 S の平面図形 A が、区間 $a \leq x \leq b$ 上で $\varphi(x) \leq \psi(x)$ となる連続関数 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ を用いて $A = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$ と表せたとき、 A の重心の座標は

$$\left(\frac{1}{S} \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))x dx, \frac{1}{S} \int_a^b \frac{\psi(x)^2 - \varphi(x)^2}{2} dx \right)$$

であることも証明無しに使ってもよい。

II

(25 点)

(1) $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ として漸化式

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$$

で多項式 $T_1(x), T_2(x), \dots, T_n(x), \dots$ を定めると, 任意の自然数 n と実数 θ に対して

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

となることを示せ。

(2) 任意の自然数 n と実数 θ に対して

$$\begin{aligned} & \cos(\theta) \cos\left(\theta + \frac{1}{n}2\pi\right) \cos\left(\theta + \frac{2}{n}2\pi\right) \cdots \cos\left(\theta + \frac{n-1}{n}2\pi\right) \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}} - \cos(n\theta)}{2^{n-1}} & (n: \text{偶数}) \\ \frac{\cos(n\theta)}{2^{n-1}} & (n: \text{奇数}) \end{cases} \end{aligned}$$

となることを示せ。

III 次の文章を読み、問1～4に答えよ。

(25点)

地球と金星は、半径と質量がほぼ同じで公転軌道も近いので、「兄弟星」と呼ばれることがある。両惑星とも内部は岩石と金属から構成され、表面には大気があるという点でも、地球と金星はよく似ている。地球と金星との決定的な違いは海の有無であるが、今から約46億年前に地球と金星が誕生したときには、どちらの惑星の表面にも海はなかったと考えられている。誕生時の地球と金星の表面には、二酸化炭素と水蒸気を主成分とする高温の大気が存在していた。その後、両惑星の大気温度は下がり続けたが、①地球の大気温度の方がより低下したために、地球では海が形成され、金星では海が形成されなかった。②地球に海が形成された後は、地球の大気温度の低下はさらに進み、地球と金星との大気温度の違いはさらに大きくなった。

ここで、惑星大気温度の低下について考えてみよう。惑星大気温度は、惑星表面に出入りするエネルギーの大きさと、そのエネルギーを大気がどれほど保持できるかに支配される。ここでは簡単のために海がない場合を想定し、惑星大気温度は空間的に均一として考える。また、③地表に出入りするエネルギーがすべて惑星大気温度変化に使われると仮定する。すなわち、惑星大気温度は、主に以下の4つによって決定される。

- ・単位時間あたりに惑星大気が太陽から受け取る放射エネルギー (E_{sun})
- ・単位時間あたりに惑星大気が惑星内部から受け取る熱エネルギー (E_{in})
- ・単位時間あたりの惑星大気から宇宙空間への放射エネルギー (E_{atm})
- ・惑星大気全体の熱容量

E_{in} の絶対値は、惑星誕生直後のごく短い期間を除けば、 E_{sun} 、 E_{atm} に比べて著しく小さいため無視できるとすると、単位時間あたりに惑星大気に入る正味のエネルギーは $(E_{\text{sun}} - E_{\text{atm}})$ と近似できる。したがって、ある時点における $(E_{\text{sun}} - E_{\text{atm}})$ を惑星大気全体の熱容量で割ると、その時点での惑星大気温度の単位時間あたりの温度変化(温度変化率)を求めることができる。

問 1 E_{sun} は、太陽から惑星までの距離、惑星の半径、および太陽光の入射量に対する反射量の比（反射率）で決まる。太陽光の反射率が地球と金星で同じだった場合、金星の E_{sun} は、地球の E_{sun} の何倍になるか。 E_{sun} と、太陽から惑星までの距離および惑星の半径との関係を説明した上で、表 1 の値を用いて有効数字 2 桁で求めよ。計算過程も記述すること。ただし、太陽を点光源とみなし、太陽光は全方向に均一に放射されるとする。

表 1

	地球	金星
太陽からの距離（相対値）	1.0	0.72
惑星の半径（相対値）	1.0	0.95

問 2 E_{atm} は、惑星大気の絶対温度の 4 乗と惑星の表面積に比例すると仮定する。この場合の、惑星大気の温度変化率と絶対温度のそれぞれの時間変化について、以下の問いに答えよ。ただし、惑星大気全体の熱容量と E_{sun} は一定であるとする。

- (1) 解答欄のアに、惑星誕生からの経過時間を横軸、惑星大気の温度変化率を縦軸にとったグラフを、解答欄のイに、惑星誕生からの経過時間を横軸、惑星大気の絶対温度を縦軸にとったグラフを描け。両グラフとも、横軸、縦軸ともに単位および目盛は不要であるが、必ず原点を示すこと。
- (2) それぞれのグラフの主な特徴を、2つのグラフの関係に言及しながら説明せよ。

問 3 下線部①について、地球の大気温度の方がより低下したのはなぜか。考えられる原因を理由とともに説明せよ。ただし、誕生時にあった大気の温度と熱容量、および太陽光の反射率は、地球と金星で同じであったとする。

問 4 下線部②の現象が起こったのはなぜか。考えられる理由を複数挙げて説明せよ。ただし、下線部③の仮定が実際には成り立たず、惑星大気の温度変化が大気の温室効果にも左右されることを考慮に入れること。

IV 次の文章を読み、問1、2に答えよ。

(25点)

人体において、眼と半規管は回転感覚に関与する。体が回転すると、眼から入る情報が変化し、脳はこの変化を感知する。内耳に存在する半規管は内リンパ液で満たされた環状の管の構造をもつ。体が回転すると、内リンパ液は慣性によりその場に留まろうとするため、相対的に体の回転と反対方向に動く。内リンパ液の動きは感覚毛とよばれる部位を刺激し、脳はこの刺激によって生じる信号を感知する。眼からの情報と半規管からの情報は脳で統合され、体の回転として知覚される。脳には体の回転を知覚すると眼を動かす性質があるため、眼の動きを観察することにより回転感覚を調べることができる。

ヒトの回転感覚を調べるために次の実験をおこなった。明るく静かな教室に椅子が置いてある。椅子は座面中央の軸を中心に水平方向に回転する。椅子に座る太郎は、時刻 t_0 において他者の操作により右方向に回転を開始した。太郎は姿勢を変えずに一定の速さ（毎秒 60° ）で回転を続け、体の正面の風景を注視し続けた。このとき、太郎のメガネに取り付けられた小型ビデオカメラにより眼の黒目の位置を計測すると、図1に示すような動きが見られた。すなわち、黒目は体の回転と反対方向に緩やかに移動した後、体の回転方向に急速に移動する動きを繰り返していた（区間A）。次に、時刻 t_1 において教室を完全に暗くしたところ、①眼の動きが徐々に遅くなり、やがて静止した（区間B）。その後、時刻 t_2 において椅子の回転を急停止させ、②眼の動きを観察した（区間C）。

熟練したバレエダンサーは、演技中に連続的に回転した直後でも姿勢の乱れが生じにくい。熟練したバレエダンサーに対して上記と同様の実験を時刻 t_2 までおこない、非熟練者である太郎の眼の動きと比較した。時刻 t_0 に回転を開始し、明るいうちで回転しているとき、バレエダンサーと太郎の眼の動きに大きな違いは見られなかった（区間A）。その後、時刻 t_1 において教室を完全に暗くし、眼の動きを観察したところ、③バレエダンサーと太郎の眼の動きに違いが見られた（区間B）。

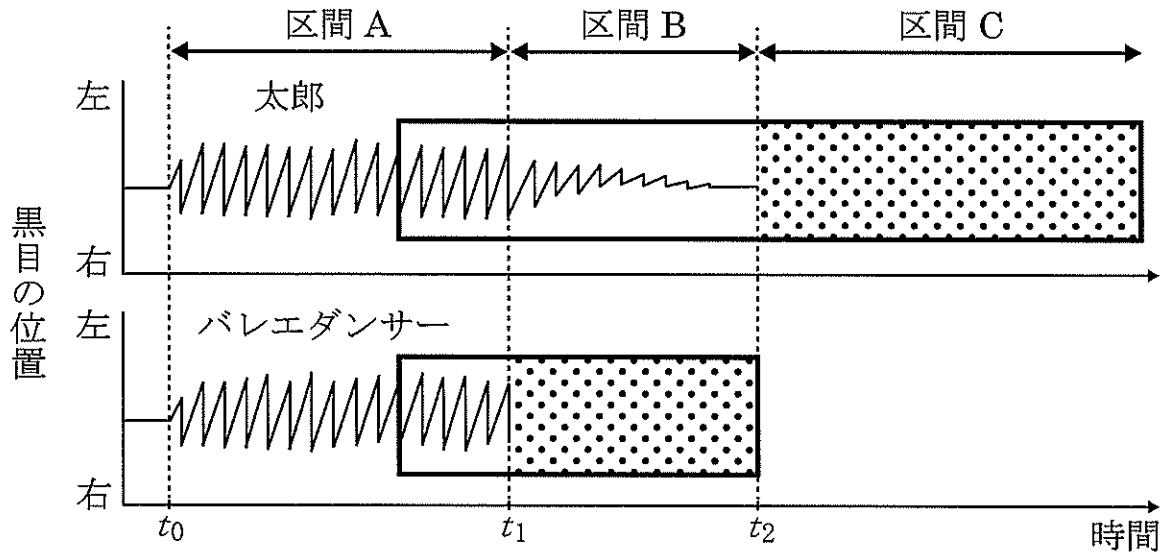


図 1

問1 下線部①のような眼の動きが生じる理由を説明せよ。

問2 下線部②と③について、以下の(1), (2)に答えよ。なお、図中の網掛けの箇所には、計測された眼の動きは示されていない。

(1) 時刻 t_2 の後、太郎の眼はどのように動くか。解答欄1aに、図中の太線の枠内に示された太郎の眼の動きを描き写し、それに続けて区間 C に相当する眼の動きを、特徴がわかるように図示せよ。また、解答欄1bにその特徴を説明するとともに、そのような眼の動きが見られる理由を説明せよ。

(2) 時刻 t_1 の後、バレエダンサーの眼はどのように動くか。解答欄2aに、図中の太線の枠内に示されたバレエダンサーの眼の動きを描き写し、それに続けて区間 B に相当する眼の動きを、太郎の眼の動きとの違いがわかるように図示せよ。また、解答欄2bに、その違いについて説明せよ。

補足説明
(総合人間学部 理系総合問題)

補 足 説 明

理系総合問題冊子

2 ページ

Ⅱ (1) の 2 行目の漸化式において、 n は 0 以上の整数とする。

※ 当該内容は試験時間内に補足説明として板書したものである。