令和2年度特色入試問題

《 理 学 部 》

数 学

80点満点

(注意)

1. 問題冊子および解答冊子は係員の指示があるまで開かないこと.
2. 問題は全部で 4 題ある (1 ページから 4 ページ).
3. 解答冊子は問題ごとに 1 冊ずつある (全部で 4 冊ある). それぞれの解答冊子は表紙のほかに 8 ページある.
4. 試験開始後, それぞれの解答冊子の表紙所定欄に受験番号・氏名をはっきり記入すること. 表紙には, これら以外のことを書いてはならない.
5. 解答は問題ごとに指定された解答冊子の解答用ページに書くこと. ただし, 続き方をはっきり示して同じ解答冊子の計算用ページに解答の続きを書いてもよい. この場合に限って計算用ページに書かれているものを解答の一部として採点する. それ以外の場合, 計算用ページは採点の対象としない.
6. 解答のための下書き, 計算などは, 計算用ページに書くこと.
7. 解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがある.
8. 解答冊子は, どのページも切り離してはならない.
9. 問題冊子は持ち帰ること. 解答冊子は持ち帰ってはならない.

$\boxed{1}$ (20 点)

$0 \leqq x < 1$ の範囲で定義された連続関数 $f(x)$ は $f(0) = 0$ であり，$0 < x < 1$ において何回でも微分可能で次を満たすとする．

$$f(x) > 0, \qquad \sin\left(\sqrt{f(x)}\right) = x$$

この関数 $f(x)$ に対して，$0 < x < 1$ で連続な関数 $f_n(x)$，$n = 1, 2, 3, \cdots$ を以下のように定義する．

$$f_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x)$$

以下の設問に答えよ．

(1) 関数 $-xf'(x) + (1 - x^2) f''(x)$ は $0 < x < 1$ において x によらない定数値をとることを示せ．

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，極限 $a_n = \lim_{x \to +0} f_n(x)$ を求めよ．

(3) 極限 $\lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n! 2^{\frac{n}{2}}} \right)$ は存在することが知られている．この事実を認めた上で，その極限値を小数第 1 位まで確定せよ．

$\boxed{2}$ (20 点)

次の3つのルール (i)，(ii)，(iii) にしたがって三角形ABCの頂点上でコマを動かすことを考える．

(i) 時刻0においてコマは頂点Aに位置している．

(ii) 時刻0にサイコロを振り，出た目が偶数なら時刻1で頂点Bに，出た目が奇数なら時刻1で頂点Cにコマを移動させる．

(iii) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，時刻 n にサイコロを振り，出た目が3の倍数でなければ時刻 $n+1$ でコマを時刻 $n-1$ に位置していた頂点に移動させ，出た目が3の倍数であれば時刻 $n+1$ でコマを時刻 $n-1$ にも時刻 n にも位置していなかった頂点に移動させる．

時刻 n においてコマが頂点Aに位置する確率を p_n とする．以下の設問に答えよ．

(1) p_2，p_3 を求めよ．

(2) $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，p_{n+1} を p_{n-1} と p_n を用いて表せ．

(3) 極限値 $\lim_{n \to \infty} p_n$ を求めよ．

$\boxed{3}$ (20 点)

整数 k，n は $0 \leqq k < n$ を満たすとする．以下の設問に答えよ．

(1) $f(x) = x^n$，$g(x) = x^k$ とする．$1 \leqq x < y$ に対して，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left|\frac{g(x)-g(y)}{f(x)-f(y)}\right| < \frac{1}{x}$$

(2) $f(x)$，$g(x)$ を実数係数の整式で，$f(x)$ の次数を n とし，$g(x)$ の次数を k 以下とする．$f(x_0)$ が整数となるすべての実数 x_0 に対して $g(x_0)$ も整数となるとき，$g(x)$ は x によらず一定の整数値をとることを示せ．

$\boxed{4}$ (20 点)

四面体 ABCD の面および内部から一直線上にない 3 点 P, Q, R を選ぶ．このとき，三角形 PQR の面積は四面体 ABCD の 4 つの面の面積のうち最大のものを超えないことを示せ．

問題は，このページで終わりである．