

30 年来の未解決問題「輪番割当の 6 分の 5 予想」を数学と計算機で証明 — 周期タスクの詰込・被覆問題で限界値を決定 —

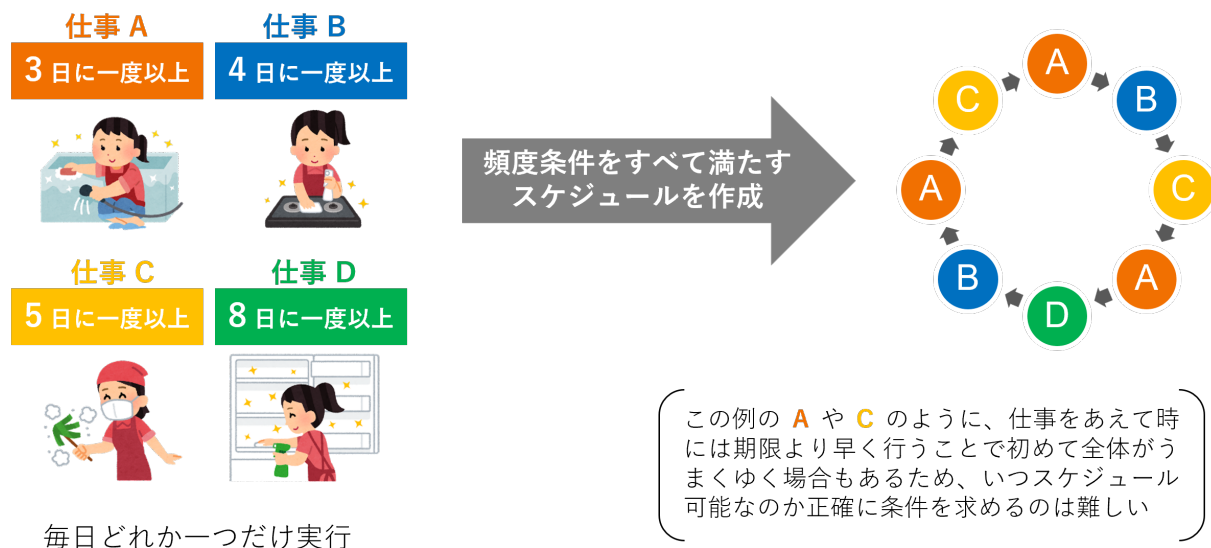
概要

京都大学数理解析研究所の河村彰星准教授、小林佑輔准教授の研究グループは、実時間システムや定期業務の基礎となる数学モデル「輪番割当問題」^(※1)において、30年以上にわたり未解決であった「密度6分の5予想」および関連する定理群を証明しました。

輪番割当は、複数の定期的な仕事を「最長で〇〇日（あるいは〇〇ミリ秒）に1度以上は実行する」という条件のもと、一つの資源で順次実行できるかを問う問題です。仕事の総量（密度）が5/6（約83.3%）以下ならば必ずスケジュール可能とする「6分の5予想」は、1993年の提唱以来、実時間スケジューリング^(※2)における理論的難問の一つでした。本研究では、数理解析と計算機支援^(※3)による厳密な全探索を融合させ、予想の正しさを証明しました。またこの手法を拡張し、頻度に下限ではなく上限を設ける双対な問題設定（被覆型）においても、最良の密度限界（約1.264）を特定・証明しました。

本成果は、組込み制御や通信処理、ロボットの周回運用計画など、時間制約のある仕事・資源の配分に明確な理論的保証を与えるものです。成果の一部は 2026 年 8 月 7 日に米国科学アカデミー紀要 (*PNAS*) にオンライン掲載され、一部は同年 8~9 月に欧州算法シンポジウム (*ESA*) にて発表されます。

輪番割当問題 (詰込型)



1. 背景

現代のコンピュータシステムや社会インフラ運用において、複数の処理や作業を定められた頻度・期限内に実行する「実時間（リアルタイム）スケジューリング」は欠かせない基礎技術です。

この中で最も基本的な数理モデルの一つが「輪番割当問題」です。これは、繰り返し実行すべき仕事がいくつかあり、各仕事に「最長で何単位時間に1度行わなければならないか」という許容周期が指定されているとき、一つの資源（プロセッサや作業員など）で全仕事を遅延なく回し続けられるかを問うものです。

仕事の総量すなわち「密度」（各仕事の許容周期の逆数の総和）が1（100%）に近ければ当然スケジュールが困難になりますが、どこまで密度を下げれば「必ずスケジュール可能」と言えるのかという限界値は解明されていませんでした。1993年に提唱された「密度が $5/6$ （約83.3%）以下であれば、どのような仕事の組み合わせでも必ず輪番割当が可能である」という「6分の5予想」は、数理スケジューリング分野における未解決問題として30年以上にわたり研究者を悩ませてきました。

2. 研究手法・成果

本研究では、数学的な理論と計算機（コンピュータ）による膨大な探索を融合させるアプローチで証明を行いました。

- 輪番割当（詰込型）における6分の5予想の証明 [論文1]

問題がもつ連続的な数理構造（実数周期への拡張など）を利用し、検証すべきパターンを比較的少数の仕事からなる有限個のケースへと理論的に絞り込みました。そのうえで、検証プログラムにより計算機上で莫大な場合分け探索を実行し、6分の5予想が正しく成り立つことを証明しました。また副産物として、関連する「竹叢伐採問題」の近似比を改善する成果も得られました。

- 「被覆型」における密度限界の決定 [論文2]

論文1（詰込型）で確立した理論的アプローチを拡張し、「〇〇日に1回以下しか実行できない」という制約を課する被覆型の輪番割当問題に適用しました。その結果、常にスケジュールが存在するための密度の最小限界値 $1.264\cdots$ の証明に成功しました。

3. 波及効果、今後の予定

本成果は、30年来の懸案であった組合せ論・スケジューリング理論の未解決問題に決着をつける成果です。

今回解明された限界値は、抽象化された基本モデルにおける数理的な保証ですが、実時間システム（組込み制御やデータ通信等）における処理の割り当てや、ドローン・ロボット等による周回運用計画など、時間制約をとまなう資源配分を考慮・設計する際の基礎的な指針（スケジュールが破綻しない限界値の基準）を与えるものと期待されます。

また、本研究で用いた「数学的推論と計算機による膨大な探索の融合手法」は、同様に場合分けが複雑で手計算では解決困難な他の組合せ最適化問題・スケジューリング問題の解明に向けても新たな道を開くものです。今後は、より現実的な条件や制約を取り入れた発展的モデルの解析への展開が期待されます。

4. 研究プロジェクトについて

本研究は、テレコム先端技術研究支援センター、京都大学教育研究振興財団、JSPS 科研費（課題番号 JP23K28036、JP24K02901 等）および JST ERATO（研究支援番号 JPMJER2301）の助成を受けて実施されました。

<用語解説>

(※1) **輪番割当 (pinwheel scheduling)** 複数の周期的なタスクに対し、定められた時間間隔の制限を満たしながら、単位時間ごとに1つのタスクを順次割り当てるスケジュールを作成する問題。毎日一つタスクを実行するとして、各タスクに「最長〇〇日に1回以上行う」という制約がある**詰込型**と、「最短〇〇日に1回以下しか行わない」という制約がある**被覆型**がある。

(※2) **実時間スケジューリング (real-time scheduling)** タスクの処理を定められた制限時間内に必ず完了させることを保証する制御手法。組み込みシステムや通信制御などで不可欠な技術。

(※3) **計算機支援証明 (computer-aided proof)** 数学的な理論解析によって示すべき内容を有限個のパターンや形式的な確認に帰着した上で、コンピュータ・プログラムを使って厳密に漏れなく検証する証明手法。

<研究者のコメント>

輪番割当は素朴な設定でありながら解析の難しい問題でしたが、大規模計算の手法がうまく効いて予想の解決に至ったのは幸運でした。人間が読める「きれいな」証明が今後得られる望みも捨ててはいませんが、ともあれ近年のAIをはじめとする計算機技術の著しい進歩は、数学研究に新たな可能性と展開をもたらしつつあります。コンピュータの高度な探索・検証能力の活用は、今後も従来の枠組みを超えて我々の数学的理解を大きく進展させるものと期待しています。(河村彰星)

<論文タイトルと著者>

[論文 1]

タイトル: Proof of the Density Threshold Conjecture for Pinwheel Scheduling

(輪番割当問題の密度閾値予想の証明)

著 者: Akitoshi Kawamura

掲 載 誌: *Proceedings of the National Academy of Sciences*

DOI: 10.1073/pnas.2530214123

[論文 2]

タイトル: A Computer-Assisted Proof of the Optimal Density Bound for Pinwheel Covering

(被覆型輪番割当における最良の密度限界の計算機援用証明)

著 者: Akitoshi Kawamura・Yusuke Kobayashi

掲 載 誌: *34th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2026), Leibniz International*

Proceedings in Informatics (LIPIcs) 388, in press

DOI: 10.48550/arXiv.2510.06533