

# 任意個数の四面体に対してカライドサイクルの存在を数学的に証明

楕円テータ関数による明示公式の構成で 50 年来の謎に決着

## ポイント

- ① 6 個以上の四面体があれば、カライドサイクル (※1) が必ず構成できることを世界で初めて厳密に証明し、50 年来の謎に決着をつけた。
- ② 楕円テータ関数 (※2) を用いてカライドサイクルを設計する公式を明示的に構成。
- ③ 高効率な攪拌機構・宇宙用アンテナ・分子ロボットの設計に利用されることを期待。

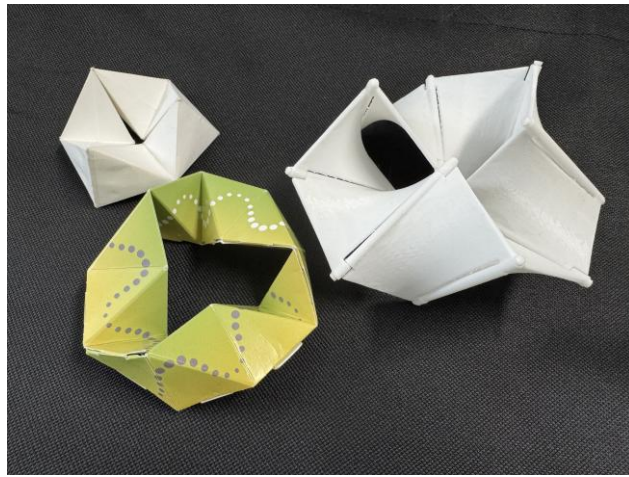
## 概要

カライドサイクルとは、6 個以上の合同な四面体を蝶番でつなぎ環状に連ねたリンク機構 (※3) で、イルカが吹くバブルリングのようにくるくると回転させることができます。折り紙として作ることでできるリンク機構の代表例として 50 年以上前から知られていますが、自明な場合を除き、カライドサイクルの存在の厳密な証明や明示的な公式の構成は、リンク機構の設計・解析の難しさから、その長い歴史にも関わらずこれまで存在しませんでした。

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所の重富尚太助教・梶原健司所長、および京都大学理学研究科の鍛冶静雄教授からなる研究グループは、楕円テータ関数という特殊な数学的道具を用いてこの問題を解決しました。研究グループはまず、カライドサイクルを「擦れ角と辺の長さが一定の閉じた折れ線」として捉えられるという事実に着目しました。次に、擦れ角と辺の長さが一定である折れ線の頂点の位置ベクトルを表す公式を、楕円テータ関数を用いて明示的に構成しました。そして、この公式で構成できる折れ線が閉じた曲線、すなわちカライドサイクルになるためのパラメータが、四面体の個数が 6 個以上であれば必ず存在することを厳密に証明しました。この公式は、カライドサイクルの存在を数学的に厳密に保証するだけでなく、実際に機構を作るための具体的な設計値をも与えます。また、公式を解析することで、カライドサイクルの変形が可積分系 (※4) と呼ばれる特殊な微分方程式で表現できることも確認できており、その運動の軌跡が半離散負定曲率曲面 (※5) と呼ばれる美しい幾何学的図形を形成することも示され、離散微分幾何学 (※6) との深い繋がりも示されました。また、数値解析により、本研究で構成されたカライドサイクルは「1 自由度 (※7)」という際立った性質を持つことも予想されています。これはたわみなどの余分な動きをせず、制御性とエネルギー効率に優れることを意味し、高効率な攪拌機構・宇宙用アンテナ・分子ロボットといった応用への展開が期待されます。ただし、1 自由度であることの厳密な数学的証明は今後の課題です。

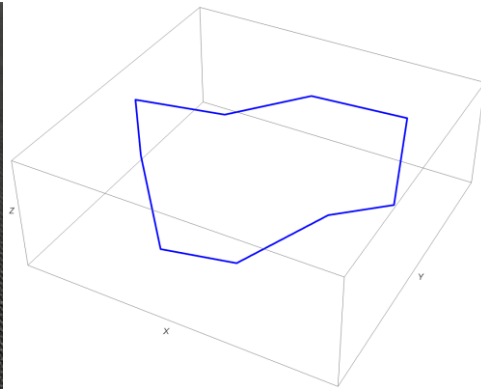
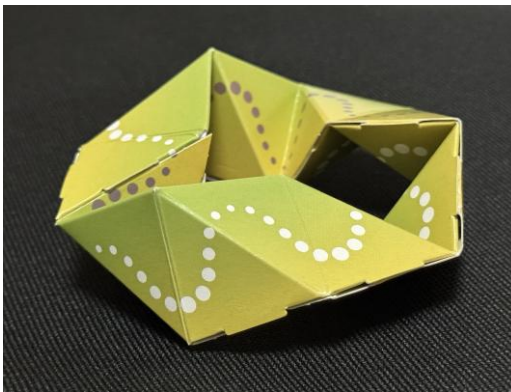
本研究は、折り紙という身近な対象を通じて、可積分系・離散微分幾何学・トポロジーといった現代数学の複数の分野が深く結びついていることを示しており、数学の面白さをわかりやすく伝えるための題材としても注目されています。参考資料として折り紙の設計図や 3D プリント可能なデータをオープンソースで公開しています。

本研究成果は米国の国際学術雑誌 *Studies in Applied Mathematics* に 2026 年 5 月 13 日 (水) (日本時間) に掲載されました。



【左からそれぞれ6個、9個、8個のパーツで構成されたカライドサイクル。】

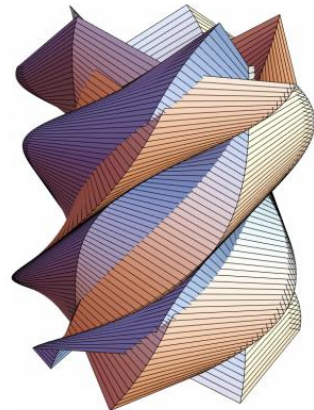
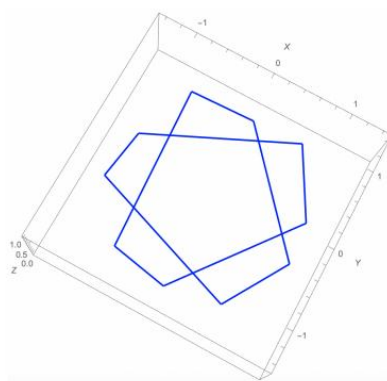
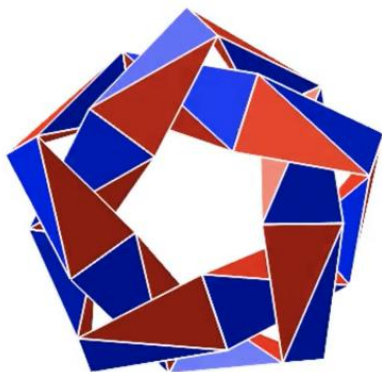
カライドサイクルの本質的な形状は隣り合う蝶番の位置関係のみで決まるので、構成する要素は四面体でなくてもよいです。また、紙だけでなくプラスチックや金属でも作ることができます。



【(左) 9個の四面体で構成されたカライドサイクル。

(右) 明示公式から得られる、9個の辺を持つ閉じた折れ線。】

これはカライドサイクルと閉じた折れ線の対応関係を示す図です。左側の写真にあるカライドサイクルの本質的な構造を抜き出すと、右側の折れ線とみなすことができます。逆に、右側の折れ線が得られていれば、適切に「肉付け」をすることで左側にあるようなカライドサイクルを構成することができます。



【(左) 15個の四面体で構成されたカライドサイクル。

(中央) 明示公式から得られる、15個の辺を持つ閉じた折れ線。

(右) 15個の四面体で構成されたカライドサイクルの軌跡から得られる半離散負定曲率曲面。】

## 【用語解説】

(※1) カライドサイクル：6個以上の合同な四面体を向かい合う辺でつなぎ環状に連ねた立体折り紙で、イルカのバブルリングのように連続的に回転できる。「M.C. エッシャー カライドサイクル」という本で広まった。

(※2) 楕円テータ関数：19世紀から研究されてきた特殊関数の一種で、様々な恒等式を満たすことや擬二重周期という性質を持つことで知られている。数論・暗号理論・物理学など幅広い分野に現れる。

(※3) リンク機構：複数の剛体が関節でつながれた機械的なからくり。ロボットアームや車のサスペンションから折り畳み構造まで幅広く使われる。

(※4) 可積分系：物理学に起源を持つ、特別な性質を持つ非線形微分方程式や差分方程式。非線形の微分方程式や差分方程式は通常解くのが非常に困難とされているが、可積分系はテータ関数などを用いて厳密に解ける。波の伝播を記述する Korteweg-de Vries (KdV) 方程式や戸田盛和の発見した戸田格子方程式が特に有名。

(※5) 半離散負定曲率曲面：ガウス曲率が負で一定の曲面のことを負定曲率曲面と呼ぶが、これはその離散的な類似物の一つ。

(※6) 離散微分幾何学：なめらかな曲線や曲面の幾何学（微分幾何学）の離散的な類似を扱う数学の分野。コンピュータグラフィックスや建築設計、数値計算などへの応用も知られている。

(※7) 1自由度：機構の動き方がただ1通りに決まる性質。余分な遊びがなく動くため、制御性とエネルギー効率に優れる。

## 【謝辞】

本研究は JSPS 科研費（JP25K00921, JP25H00399, JP25K21661, JP25K17297）、JST CREST（JPMJCR1911）の助成を受けたものです。

## 【参考資料】

- ・ **メビウス・カライドサイクルの紹介動画**（1分程度）：<https://youtu.be/NULt0InuVFU>
- ・ **折り紙展開図・3Dモデル**：<https://github.com/shizuo-kaji/Kaleidocycle/blob/master/README.ja.md>
- ・ **紹介記事**：京都大学理学研究科・理学部数学教室 同窓会誌 9号, 2025  
「動く折り紙『カライドサイクル』をめぐる機構学と幾何学の出会い」  
<https://www.math.kyoto-u.ac.jp/alumni/bulletin9/kaji.pdf>
- ・ **メビウス・カライドサイクル体験キット**  
<https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/wp-content/uploads/2024/03/kaleidocycle.pdf>

## 【論文情報】

掲載誌：Studies in Applied Mathematics

タイトル：An Explicit Construction of Kaleidocycles by Elliptic Theta Functions

著者名：Shizuo Kaji, Kenji Kajiwara, Shota Shigetomi

D O I : 10.1111/sapm.70224