

可逆なシステムにおいて時間の矢を持つのは何故か

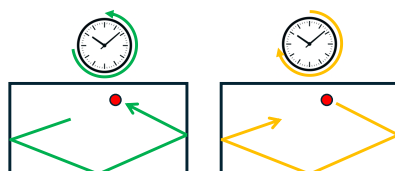
—ある時間反転対称性を持つ系からアナソフ性の証明へ—

概要

梅野健 情報学研究科教授、大久保健一 同研究科博士課程（現：公立諏訪東京理科大学講師）らの研究グループは、可逆なシステムにおいて時間の矢を持つのは何故かを明らかにする具体的な物理モデルを構成することに成功しました。一般に時間反転対称性という性質を持つシステムの不可逆性を示すことは、時間反転対称性を持つミクロなニュートン力学から熱力学第二法則というマクロな不可逆性の起源は何かを問う 19 世紀後半のボルツマンによる統計力学創設以来の、物理学の未解決問題（時間の矢の問題）の一つでした。同研究グループは、AI アルゴリズムでも使われている時間反転対称性を保ったまま時間の離散化をする 2 次のシンプレクティック数値積分法（リープフロッグ法）を用いて時間反転対称性を持つ物理モデルを構成し、あるパラメータの条件で、そのモデルから導出できる力学系が唯一の平衡状態（物理的測定）に収束するという性質を持つアナソフ性という性質を持つことを証明しました。このアナソフ性により、唯一の平衡状態に収束するという意味で不可逆性を厳密に証明することになります。今までビリヤードや負曲率の多様体上の測地線といった系のみにおいてこのアナソフ性が示されてきましたが、今回の様に運動エネルギーとポテンシャルエネルギーからなる普遍的な形式を持つ系から導出される力学系のカオス性（アナソフ性）を証明したのは初めてです。この結果は、今後、AI・機械学習における時間の矢の問題という新しい問題を数理的に解き明かし、更には 21 世紀以降の次世代 AI におけるより効率的なカオス・サンプリング法を考案するヒントになると期待されます。

本研究成果は、2025 年 7 月 1 日に、国際学術誌「*Chaos*」にオンライン掲載されました。

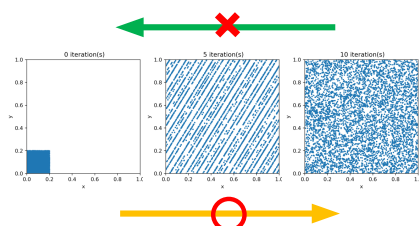
Microscopic reversibility



Macroscopic irreversibility



Image of Mixing



本研究の概念図

1. 背景

ミクロには可逆な系でなぜマクロに不可逆性を持つのかという不可逆性の問題（時間の矢の問題）は、19世紀の後半、ボルツマンが統計力学を創設し、熱力学第二法則（エントロピー増大則）の起源を解明する知的格闘のときから始まります。ボルツマンは分子混沌仮説を仮定し、気体中で衝突する分子同士の相関が失われるということでエントロピー増大則を導きましたが、ツェルメロはポアンカレの再帰定理（有限の閉じた系において、任意の初期状態から出発した運動は無限回その初期状態の近傍を通る）によりエントロピーが常に増大するのではなく、状態の関数であるエントロピー関数も元に戻ると一般的に証明し反論するなど論争が続いておりました。20世紀初頭、ギブスが無数の同一の系の仮想的な集合であるアンサンブルという概念を考え、今の統計力学の基礎を作り、更に20世紀中盤から後半にかけてカオスという現象が様々な物理系において発見され、決定論的な力学法則に従いながらも予測不可能な振る舞いを示すことがわかってきました。特にそのカオス現象の中で混合性という、熱いコーヒーにミルクを混ぜると一瞬でブラックからコーヒー色になるという様な特徴である、初期状態の持つ情報が短期間で失われどんな初期状態から出発しても唯一の平衡状態に収束するという性質が決定論的なシステムの持つ不可逆性を示す性質として、クリコフなどにより指摘されてきましたが、具体的な系で混合性を示された系はあまりありませんでした。時間反転対称性を持つ系でこの混合性が示されたのは、シナイによって示されたビリヤード、スタジアムビリヤードといったビリヤード系や負曲率を持つ多様体上の測地線上の運動といった限られたものでした。

2 研究手法・成果

まず20世紀の終わりに、正接関数（ $\tan$ 関数）の加法公式から可解カオスという混合性を満足し平衡状態がコーシー分布という安定分布に収束する系を系統的に構成できることがわかっておりました。我々は、この物理系は $\log(|\cos x|)$ という周期的なポテンシャルによる構成で、運動量方向で超拡散が生じることなどを示し、更に機械学習アルゴリズムにも使われている2次の対称型シンプレクティック積分法（リープフロッグ法）を同ポテンシャル系に適用することを提案し、任意の時間 Δt で差分化したとしても元の微分方程式系が持つ時間反転対称性を保存する物理系を2017年頃に構成することに成功しました。そして更に、同系でアナソフ性という混合性よりも強い条件を証明しました。その結果、唯一つの平衡状態に収束するという不可逆性を持ち、その平衡状態が物理的な測度という性質を持つSRB測度（シナイ＝リュエール＝ボウエン測度）であること、及び力学的なエントロピー生成率と考えられるコルモゴロフシナイエントロピーが正であること、コルモゴロフシナイエントロピーと正のリアプノフ指数に等しいというペシンの等式といった様々な性質を証明しました。

3. 波及効果、今後の予定

運動エネルギーとポテンシャルエネルギーからなる物理系から構成した系で、時間反転対称性を保存する系からアナソフ性という一種の不可逆性（時間の矢）の起源の特徴を証明することができました。これは混合性を持つカオスが不可逆性の起源において重要な役割を果たすことを意味します。今回証明したように古典力学の世界においては、混合性という概念がありある種の不可逆性を証明することができましたが、同様の時間反転対称性を持つ量子力学には、混合性という概念がなく、同様の手法で時間の矢を示すことは難しく新しい概念が必要だと思われます。この不可逆性を示す混合性やアナソフ性といった古典力学の中で生まれた概念が現代物理学の量子力学でどう両立されるのか、は今後引き続き難問として残ります。また基礎だけでなく応用も考えられます。今回機械学習アルゴリズム（ハミルトンモンテカルロ法）でも用いられる2次のシンプレクティ

ック数値積分法がアナソフ性の鍵となりましたが、効率よく平衡状態にサンプリングさせるカオス的なサンプリング法（シンプレクティックなカオスモンテカルロ法）を構築できる可能性がありその方面でも研究の進展が期待できます。

<用語解説>

ハミルトン力学系：運動エネルギーとポテンシャルエネルギーからなる力学系。時間 t を $-t$ に逆転したとしても同じ力学方程式に従うという時間反転対称性を持つ。

シンプレクティック数値積分法：ハミルトン力学系の持つ、正準性を保つ数値積分法。微分方程式の数値解法としてよく使われるオイラー法やルンゲクッタ法の場合、ハミルトン力学系が保存すべきリュービル測度を保存しない。リュービル測度などのハミルトン力学系が持つべき測度を保存する数値計算積分法であり、衛星の軌道設計や最近では、機械学習などにおけるハミルトンモンテカルロ法のアルゴリズムなどに使われる。

カオス性：わずかな初期値の誤差があったとしても、時間発展とともに初期状態の差が指数関数的に増大する軌道の不安定性を持つ。決定論的なシステムであっても長期の予測が不可能であるという、天気予報の長期予測が困難である理由にカオス性があると考えられている。

可解カオス：カオス性を持つにも関わらず、平衡状態を記述する確率密度関数が陽に書け、更には一般解が解析的にかき、カオス性が厳密に証明できる系。論文著者の一人である梅野の 1997 年の論文のタイトルで初めて使われた造語であるが今は一般的に使われている。

ツェルメロの再帰性反論：閉じた系で測度（確率）を保存する系において一般的に成立する性質を用いた反論。ほとんど全ての初期点から出発するとその近傍に無限回再帰するという一般的な性質（ポアンカレの再帰定理）を用いて、ツェルメロがボルツマンの不可逆性が成立しないと反論した。本論文で示した閉じた系におけるアナソフ性（混合性）とポアンカレの再帰定理は両立でき矛盾しない。

時間反転対称性：物理システムにおいて、映画の巻き戻しの様に時間の進む方向を逆にしても、その運動を記述する方程式が不変である性質を示す。ニュートン力学、それを一般化したハミルトン力学系、量子力学系など物理の基礎方程式が満足する基本的な性質の一つ。

混合性：熱いコーヒーにミルクを混ぜると一瞬でブラックからコーヒー色に混ざる様な現象。初期状態の情報が時間の経過とともに失われる現象。混合性と不可逆性は密接に関わっている。混合性があれば**エルゴード性**という長時間平均が相空間上の平衡確率で計算する期待値（位相平均）と等しいという性質が自動的に満足される。

アナソフ性：混合性の中で、特に強い混合性を示す性質であり、唯一の平衡状態に収束するなどの性質を持つ。写像の性質として、考える空間が引き伸ばす方向と縮小する方向の両方に分解されることを特徴とする。

SRB 測度：Sinai, Ruelle, Bowen の 3 名の学者によって考えられた力学系の平衡状態を示す測度。SRB 測度上では、観測される物理量の長時間平均と位相平均が等しくなり、ある条件下でカオス性の強さを示す正のリアプノフ指数の和と力学系のエントロピー生成率を示すコルモゴロフエントロピーが等しくなるという**ペシンの等式**が成立する。

ハミルトンモンテカルロ法：機械学習のアルゴリズムの一種であり、時間反転対称性を持つハミルトン力学系のシンプレクティック差分により、サンプリングをしていく。解きたい機械学習のアルゴリズムに従いポテンシャルエネルギーを設計し、運動エネルギーを与え粒子を動かしていく。ハミルトン力学系の測度を保存するという性質を保つサンプリング法である。

カオスモンテカルロ法：モンテカルロ法の一つ。乱数の代りに非一様な確率分布を持つカオス系列を用いたサ

ンプリング法。1997 年に梅野が発明。無相関な乱数と異なり、カオス的な相関があることを特徴とし、2000 年に梅野により超効率性（Superefficiency）が達成されることが示された。今後 AI などの機械学習アルゴリズムにおいて収束の早いサンプリング法として期待される方法。

<研究者のコメント>

「時間の矢の問題というのは、単に古い物理の未解決問題に関わるだけではなく、実は情報学における、暗号、システムの予測可能性の本質的な問題、更には AI におけるサンプリングの問題といった現代的な問題にも深く関わってくると考えております。研究開始から約 30 年という不可逆性（時間の矢）を今の瞬間噛み締め、これからの時間は、AI とカオスの融合による抜本的に新しい AI アルゴリズムの構築や、現在未解決である短期地震予知の問題（自然界の予測可能性の問題）に挑戦していきたいと考えております。」（梅野健）

「今回の論文では、閉じたトーラス上の具体的ハミルトン系から導かれたシンプレクティック写像がアノソフ写像であることを証明し、Lebesgue 測度が唯一の平衡測度・唯一の SRB 測度・物理測度となることを示せました。この成果をもとに、時間の矢の問題に関する研究をより深めていきたいと考えています。」（大久保健一）

<論文タイトルと著者>

タイトル：Anosov Properties of a Symplectic Map with Time-Reversal Symmetry

（時間反転対称性を持つシンプレクティック写像のアノソフ性）

著 者：Ken-ichi Okubo, Ken Umeno

掲 載 誌：Chaos Vol. 35 Issue 7(2025)

DOI：10.1063/5.0248135