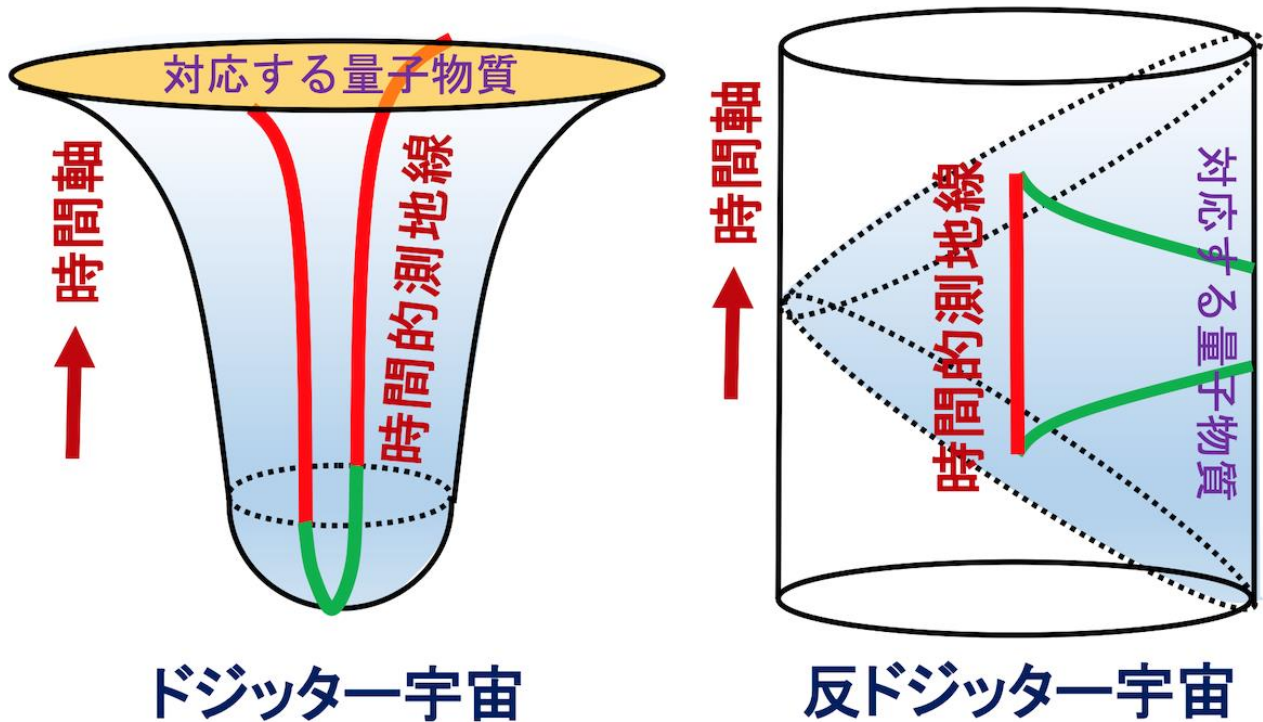


擬エントロピーからの時間軸の創発

—ホログラフィック・エンタングルメントエントロピーの一般化

概要

京都大学基礎物理学研究所 瀧祐介 博士課程学生、土井一輝 同修士課程院生、Jonathan Harper 同研究員、Ali Mollabashi 同研究員、高柳 匡 同教授、の研究グループは、ドジッター宇宙に対するホログラフィー原理を考察し、3次元ドジッター宇宙における時間的な測地線の長さが、その重力理論に対応する量子物質の理論(共形場理論)の「擬エントロピー」と呼ばれる量の虚数部分に相当することを見出しました。擬エントロピーは、量子エンタングルメントの強さを測るエンタングルメント・エントロピーを一般化した量で、始状態と終状態の二つの異なる状態に依存する量です。このことから、ドジッター宇宙の時間軸がホログラフィー原理を通じて、量子物質の擬エントロピーから創発することが期待されます。さらに、エンタングルメント・エントロピーを定義する際の部分系を時間的にとることで「時間的エンタングルメント・エントロピー」を導入し、この量も擬エントロピーの一種とみなせることを明らかにしました。さらに、この時間的なエンタングルメント・エントロピーは、ホログラフィー原理を用いて3次元反ドジッター宇宙における測地線を用いて幾何学的に計算できることを示しました。本成果は、2023年1月19日に米国の国際学術誌「Physical Review Letters」にオンライン掲載されました。



背景

物質を細かく分けていくことで最終的に到達する最小単位は素粒子と呼ばれます。同じように宇宙空間を細かく分けていくと何か最小単位があるのでしょうか？ミクロな重力理論、すなわち量子重力理論、における最小の長さの単位はプランク長と呼ばれ、これは 10 のマイナス 35 乗メートルという極めて短いスケールです。では、このミクロなスケールに関してどのような構造が宇宙にあるのでしょうか？最近、量子情報理論の知見を用いた量子重力理論の研究によって、重力理論の宇宙は量子エンタングルメントの集合体と解釈でき、1量子ビットという最小単位の量子エンタングルメントが、プランク長に相当するという新しい描像が生まれてきました。この新しい考え方の発端となったのが、笠と高柳が発見したホログラフィック・エンタングルメントエントロピーの公式です。宇宙定数が負の宇宙である反ドジッター宇宙におけるホログラフィー原理(AdS/CFT 対応)を用いると、「反ドジッター宇宙を記述する重力理論は、その宇宙の端に置かれている特殊な量子物質の理論（共形場理論と呼ばれる）と同じ」であることが分かります。前述の公式は、反ドジッター宇宙において極小曲面（面積が最小の曲面）の面積は、プランク長を単位にとると丁度、エンタングルメントエントロピーに等しいというものです。エンタングルメントエントロピーは、1量子ビットの量子エンタングルメントが何個あるのか測る量です。この公式から、重力理論の宇宙における空間座標が、量子エンタングルメントから創発するということが分かります。では、宇宙の時間座標はどのようなのでしょうか？我々の宇宙がビックバンによって創成されることを考えると、時間が宇宙の創成と共に生まれることとなります。従って、時間軸がより根源的なものから創発する様子を解明することは、宇宙の起源を知る上でも大変重要です。この深遠な問いに動機付けられて、本研究グループは、ドジッター宇宙のホログラフィー原理(dS/CFT と呼ばれます)の量子情報理論的な側面の研究を行いました。ホログラフィー原理によると、宇宙を記述する重力理論は、その宇宙の端に仮想的に存在する量子物質の理論と等価になります。ドジッター宇宙の端は、無限の未来にあり、そこに量子物質（特に共形場理論と呼ばれるクラス）が置かれているわけです。つまり、量子物質は時間のない、空間的な世界に存在することになります。従って、ホログラフィー原理によると、空間的世界に置かれた量子物質から時間軸が創発することになります。そこで、本研究グループは、この時間軸の創発について量子情報理論的な観点から理解を深めるために、前述のホログラフィック・エンタングルメントエントロピーの公式をドジッター宇宙へ拡張する研究を行いました。またこの解析と数理的な構造が類似している「時間的なエンタングルメントエントロピー」を導入し、その性質をホログラフィーと場の量子論の双方から研究しました。

2. 研究手法・成果

反ドジッター宇宙のホログラフィー原理は AdS/CFT 対応と呼ばれますが、これは「反ドジッター宇宙の重力理論が、共形場理論と呼ばれる量子臨界点に相当する量子物質の理論と等価になる」という対応関係を意味します。このとき、量子物質において与えられた領域 A（部分系 A）が、反ドジッター宇宙のどの部分領域に対応するか理解することは重要です。その際に具体的な量として、領域 A に含まれる情報量に着目します。これは量子情報理論の立場では量子エンタングルメントの強さを測る量であるエンタングルメントエントロピーと呼ばれます。共形場理論のエンタングルメントエントロピーは、AdS/CFT 対応を用いると、前述のように笠と高柳が見出したホログラフィック・エンタングルメントエントロピー公式で与えられます。つまり、領域 A を取り囲む、反ドジッター宇宙における極小曲面の面積を重力定数の 4 倍で割った量で与えられます。さて、本研究のターゲットであるドジッター宇宙に対して、このホログラフィック・エンタングルメントエントロピー公式を適用すると、反ドジッター宇宙の場合とは大きく異なり、極小曲面が時間的になることから、得られるエントロピーが複素数になってしまいます。例えば、3次元ドジッター宇宙を考えると、極小曲面は測地線に相当しますが、時間的測地線と空間的測地線の和になるので、エントロピーが複素数値にな

ります。一方で、エンタングルメントエントロピーは必ず非負の実数値を取ります。このことなどから、ドジッター宇宙のホログラフィー原理(dS/CFT 対応)では、極小曲面の面積はエンタングルメントエントロピーではなく、擬エントロピーと呼ばれるエンタングルメントエントロピーを一般化した量に相当することが分かります。エンタングルメントエントロピーは与えられた一つの量子状態に対して定義される量ですが、擬エントロピーは二つの異なる量子状態に対して定義されます。始状態を終状態に射影測定する過程を念頭に置いて、エンタングルメントエントロピーを一般化した量です。AdS/CFT 対応を用いると、擬エントロピーは虚時間で発展する反ドジッター宇宙の極小曲面の面積に等しいというホログラフィック・エンタングルメントエントロピー公式の一般化が得られることも知られています。本研究における dS/CFT 対応の結果から、時間的測地線の長さが擬エントロピーの虚数部分に等しいことが明らかとなり、この事実から、ドジッター宇宙の時間座標が、量子物質(共形場理論)における擬エントロピーの虚数部分から創発することが分かります。この発見は今まで理解が乏しかったホログラフィー原理における時間軸の創発という問題に対する重要な進展と言えます。また、擬エントロピーは空間的測地線に相当する実数部分も持ち、その実数部分にも物理的な解釈を与えることができました。さらに本研究では、同様に、時間的測地線と擬エントロピーの虚数部分の関係が従来の AdS/CFT 対応の枠内でも実は見出せることを示しました。エンタングルメントエントロピーを定義する際の部分系 A を時間的にとることで、時間的エンタングルメントエントロピーという新しい量を導入しました。この量は、擬エントロピーの特殊な場合とみなすことができ、複素数値をとる量です。この量を従来の AdS/CFT 対応を用いて計算すると、dS/CFT 対応の場合のように時間的測地線と空間的測地線の長さの和で与えられ、やはり前者が、擬エントロピーの虚数部分に相当することが分かります。以上のように本研究によって、ホログラフィー原理の幅広い例に対して、時間軸が擬エントロピーの虚数部分から創発することが分かってきました。

3. 波及効果、今後の予定

宇宙の創成を考える上で、宇宙の誕生とともに時間という概念自体が生まれる過程を物理学の理論的立場で解明することは大変重要です。そもそも量子重力理論において、「時間とは何か?」という基本的な問題自体が現在でも未解決です。本研究では、主に3次元のドジッター宇宙や反ドジッター宇宙を具体例にとってこの深遠な問題に挑み、ホログラフィー原理を量子情報理論の観点から考察することで、「時間軸が擬エントロピーの虚数部分から創発する」という重要な手がかりを得ました。同様の結果は、高次元の宇宙で少なくとも部分的には成立することが本研究でも示されていますが、より完全な解析を今後行う予定です。また、誕生したばかりのプランク長サイズの宇宙では、量子重力効果が強く、一般相対性理論のように幾何学で扱うことは難しいですが、擬エントロピーを用いることで定量的な記述できると期待されます。このような観点で量子重力理論にアプローチして宇宙創成のメカニズムを解明したいと考えております。

4. 研究プロジェクトについて

本研究は、文部科学省点日本学術振興会 科学研究費助成事業 学術変革領域研究 (A) 「極限宇宙の物理法則を創る－量子情報で拓く時空と物質の新しいパラダイム」(領域代表者:高柳匡、課題番号:21H05187)、日本学術振興会 科学研究費助成事業 基盤研究 (A) 「量子情報理論を用いた超弦理論の研究」(研究代表者:高柳匡、課題番号:21H04469)の支援を受けて行われました。

<用語解説>

[1]量子重力理論

ミクロな物理法則である量子論とマクロな宇宙の物理法則である一般相対性理論を融合させて得られる、ミ

クロナ宇宙の物理法則の理論。

[2]量子情報と量子ビット

ミクロな世界の物理法則が量子論で、ミクロな世界の情報を量子情報とよびます。マクロな世界（古典論）では、二進法では0と1の状態のどちらかが実現され、情報の最小単位である1ビットになります。しかし、ミクロな世界(量子論)では、0と1の重ね合わせの状態をとることができ、これを1量子ビットと呼びます。

[3] 量子エンタングルメント(量子もつれ)

量子ビットがA、Bと2つある場合を考えると、AもBも0である状態と、AもBも1である状態を均等に重ね合わせた状態を考えると、Aの情報とBの情報が最も強く相関します。この相関を量子エンタングルメント（量子もつれ）と呼びます。このように2量子ビットの系で最大にエンタングルした状態をベル状態ないしEPR状態と呼び、1量子ビット分のエンタングルメントに相当します。

[4]エンタングルメントエントロピー

与えられた系においてAとBの2体間に、ベル状態の何個分の量子エンタングルメントがあるのか測る量がエンタングルメントエントロピーです。数学的には、Aに制限した密度行列のフォンノイマン・エントロピーとして定義されます。

[5]ホログラフィー原理

ある宇宙の重力理論は、その宇宙の端に仮想的に存在すると考えられる量子物質の理論と理論として同一であるという原理。前者は後者より1次元高い時空となっており、平面から立体像が浮かび上がる光学のホログラムに見かけが類似しているためにホログラフィーと呼ばれます。反ドジッター宇宙のホログラフィー原理(AdS/CFT 対応)に対しては膨大な検証に成功してきています。より一般の宇宙に対するホログラフィー原理は現在でもほとんどが未解明です。

[6]ホログラフィック・エンタングルメントエントロピー

ホログラフィー原理に基づいて、量子物質のエンタングルメント・エントロピーを重力理論の立場で計算する公式。AdS/CFT 対応においては、反ドジッター宇宙の端に量子物質が存在すると考えられるので、その端に部分系Aをとり、それを宇宙内部に拡張した曲面を考えます。そのような曲面の中でも、面積が最小となる曲面（極小曲面）を選び、その面積を重力定数の4倍で割ったものがホログラフィック・エンタングルメント・エントロピーです。これは2006年に笠と高柳が発見したもので、笠-高柳公式とも呼ばれます。

[7]擬エントロピー

エンタングルメントエントロピーを、始状態を終状態に射影測定する過程を念頭に置いて、一般化した量です。エンタングルメントエントロピーは与えられた1つの量子状態に対して定義されますが、擬エントロピーは2つの異なる量子状態に対して定義されます。数学的には部分系Aに制限した遷移行列のフォンノイマン・エントロピーとして定義されます。2020年に中田、高柳、瀧、玉岡、魏の共著論文によって導入された量で、AdS/CFT 対応において擬エントロピーは虚時間で発展する反ドジッター宇宙の極小面積に等しいことも見出され、ホログラフィック・エンタングルメントエントロピーの自然な一般化も与えます。

[8]ドジッター宇宙と反ドジッター宇宙

マクロな宇宙における重力のダイナミクスは、一般相対性理論のアインシュタイン方程式によって決まりま

す。アインシュタイン方程式における項の一つが宇宙項と呼ばれ、その係数を宇宙定数と呼びます。物理的には宇宙項は真空のエネルギー（ダークエネルギー）を意味します。特に宇宙定数が正の場合にアインシュタイン方程式の代表的な解がドジッター宇宙です。ドジッター宇宙は時間が経過するにつれて空間が指数関数的に膨張する宇宙を表します。英語で de Sitter Space、略して dS。一方、反ドジッター宇宙は、宇宙定数が負のアインシュタイン方程式に対する代表的な解。円板のような空間構造をしており、境界で囲まれ、時間が経過しても大きさが変化しない宇宙です。英語で Anti de Sitter Space、略して AdS。

[9]AdS/CFT 対応

反ドジッター宇宙に対するホログラフィー原理。反ドジッター宇宙(AdS)の重力理論は、その端に存在する共形場理論(CFT)と同一の理論となるという対応関係。反ドジッター宇宙を円板と思うと、円板の外周に共形場理論が位置します。Maldacena によって、1997 年に発見されました。

[10]共形場理論

空間の角度を変えない変換を共形変換と呼び、共形変換で不変となる量子物質の理論を共形場理論と呼びます。英語で Conformal Field Theory、略して CFT。共形場理論は特に、拡大縮小しても変わらないというスケール対称性を有しており、量子物質の量子臨界点において実現される理論です。

[11]dS/CFT 対応

ドジッター宇宙に対するホログラフィー原理。ドジッター宇宙(dS)の重力理論は、無限の未来に位置すると考えられる共形場理論(CFT)と同一の理論となるという対応関係です。後者には時間座標は含まれず、時間は虚数時間と解釈され、ユークリッド空間における共形場理論になります。Strominger によって 2001 年に提唱されました。

<研究者のコメント>

ドジッター宇宙のホログラフィー原理の謎の多くは、対応する共形場理論にドジッター宇宙の時間方向が含まれていないことに起因しており、その結果、多くの物理量が虚数値をとってしまいます。本研究では、エンタングルメントエントロピーを擬エントロピーに一般化することで虚数部分も含んだホログラフィックな対応関係を発見することができました。これを突破口として、ドジッター宇宙のホログラフィー原理の構造、そして、宇宙創成のメカニズムについて解明していきたいと思えます。

<論文タイトルと著者>

タイトル：Pseudo Entropy in dS/CFT and Time-like Entanglement Entropy

(ドジッター/共形場理論対応における擬エントロピーと時間的エンタングルメントエントロピー)

著者：Kazuki Doi, Jonathan Harper, Ali Mollabashi, Tadashi Takayanagi and Yusuke Taki

掲載誌：*Physical Review Letters*

DOI：10.1103/PhysRevLett.130.031601

オンライン版：<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.130.031601>